数学与应用数学模拟试卷答案（一）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 4　　2. $B=\begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix}$　　3. $l=3$

4. 1　　5. $2e^2$　　6. $1-\cos x$

7. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　8. $\frac{4}{3}\pi$.

二、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.B　2.C　3.D　4.D　5.D　6.C　7.B　8..A

三、判断题（每小题 5 分，共 40 分）

1. ×　2. √　3. ×　4. √　5. ×　6. √　7. ×　8. √

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1. 解：解：$B\to$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\2&4&-1&3&a\\3&6&-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&0&1&1&a-4\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&a-3\end{pmatrix}$$

当 a=3 时，$R(A)=R(B)=3<4$ 有无穷解，增广矩阵可化为

$\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程为 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=1\\x_3+x_4=-1\end{cases}$，取 $x_{2,}x_4$ 为自由未知量，分别令

$x_2=0,x_4=1$ 和 $x_2=1,x_4=0$ 得基础解析为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

令 $x_2=x_4=0$，得非齐次特解 $\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$

非齐通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2\in R)$

2. 解：$|\lambda E-A|=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$，则 A 的特征根为 $\lambda_{1,2}=-2$，$\lambda_3=4$，

$\lambda_i\ (i=1,2,3)$，它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，

易知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，取 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$，那么就得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$。

3. 解：和两平面都垂直则与交线垂直

由于 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$ ，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$

则取 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2\quad 1\quad 3)$ 所求平面方程为

$$2(x-1)-(y+2)-3(z-1)=0$$

4 . $=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$

5. 解：$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

五．证明(每题 20 分，共 40 分)

1.证明：（1）反证法　不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2\cdots\boldsymbol{\lambda}_r$ 使得 $\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0}$，则可得 $\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots0\alpha_n=0}$，

而系数不全为零，则 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关与已知矛盾。则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

（2）由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$ 中部分向量线性相关，存在不全为零的数 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2\cdots\boldsymbol{\lambda}_r$ 使得 $\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0}$，则可得 $\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots0\alpha_n=0}$，而系数不全为零，则 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关。

2.

证明　首先，由 $\mathbf{0}\in V_1,\mathbf{0}\in V_2$，可知 $\mathbf{0}\in V_1\cap V_2$，因而 $V_1\cap V_2$ 是非空的．其次，如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$，而且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_2$，那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$，因此 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$．对数量乘积可以同样地证明．所以 $V_1\cap V_2$ 是 V 的子空间．▌

3.设 $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\quad(n\geq 0)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证明：先证明 $x_n<2.\because x_1<2$，假设 $x_n<2$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$$

$\therefore$ 由数学归纳法可知 $x_n < 2$.

$\because$ $x_n > 0$，$\therefore$ $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (\sqrt{x + x_n})^2 - x_n^2 = -(x_n - 2)(x_n + 1) > 0$，

$\therefore$ $x_{n+1} > x_n$，$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 为单调递增数列，且 $x_n < 2$.

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

对 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两边同时取极限，再由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n} x_n$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

19. 抛物线 $y^2 = 2x$ 上哪一点的法线被抛物线所截的线段最短。

解：设 (x_0, y_0) 为抛物线上一点，抛物线在该点的法线斜率为 $k = -\dfrac{1}{y'} = -y_0$，

故在该点的法线方程为 $y - y_0 = -y_0(x - x_0)$，

求出法线与抛物线的另一个交点（x_1, y_1）

解方程组 $\begin{cases} y_1 - y_0 = -y_0(x_1 - x_0) \\ y_1^2 = 2x_1 \end{cases}$

求得 $y_1 = -\dfrac{2}{y_0} - y_0, x_1 = \dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{y_0} + y_0)^2$

求出两点间的距离的平方 $d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$

$$=\left[\frac{1}{2}(\frac{2}{y_0}+y_0)^2-\frac{{y_0}^2}{2}\right]^2+\left(\frac{2}{y_0}+2y_0\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\frac{2}{y_0}+y_0)^2-\frac{{y_0}^2}{2}\right]^2+\left(\frac{2}{y_0}+2y_0\right)^2=\frac{4({y_0}^2+1)^3}{{y_0}^4}$$

令 $f(y_0)=\frac{4({y_0}^2+1)^3}{{y_0}^4}$，求导 $f'(y_0)=\frac{2({y_0}^2+1)^2({y_0}^2-2)}{{y_0}^6}=0,\quad y_0=\pm\sqrt{2}$

经验证，当切点为 $(1,\pm\sqrt{2})$ 时，距离最小。

数学与应用数学模拟试卷答案（二）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1．0；　2．3　3．$\frac{x-1}{3}=(y-1)=\frac{z-1}{5}$

4. $e^{-\frac{1}{2}}$　5. $a=2,b=-3$

6. $w_{xy}=f_{uu}-f_{vv}+f_{zu}-f_{zv}$　7. $du=(f_1'+f_2')dx+(f_1'-f_2')dy$

8. $(1,1)$，$2\sqrt{2}$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.D　2.C　3.C　4.D　5.　C　6.B　7.B　8.C

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1. √　2.　√　3.×4. √　5.×　6. √　7. √　8.×

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1 解：$\left(A\middle|b\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&a&1\\3&2&4&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&4-a&-1\\0&0&2-a&b-1\end{pmatrix}$，

①当 $a\neq 2$ 时，方程组有唯一解，

②当 $a=2$，$b\neq 1$ 时，方程组无解，

③当 $a=2$，$b=1$ 时，方程组有无穷多解，此时

$$x=k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$。

2. 解：（1）A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$，故特征根为

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

（2）解方程组 $(I-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha=(1,0,-1)^T$，$\beta=(0,1,0)^T$，将其标准正交化即得 A 的一个标准正交的特征向量系：$u=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}})^T$， $v=(0,1,0)^T$.

(3)A 不能对角化。

3. 解 两平面的交线的方向向量为所求直线的方向向量

因为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-4\\2&-1&-5\end{vmatrix}=(-4,-3,-1)$

所以所求直线方程为 $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$ 。

4.

解：分析　被积函数在积分区间上实际是分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 1<x\le 2 \\ x & 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

$$\int_0^2 \max\{x^2,x\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$$

5. 解 $$\iint_D x\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_0^x x\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}(x\sin 2x-x\sin x)dx=-\frac{3}{2}$$

五、证明题（40 分）

1. 证明：　$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=Ak_1\alpha_1+Ak_2\alpha_2=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2$

因为　$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$

$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2$　而 $\lambda_1\ne\lambda_2$

所以　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

2.

证明　首先，V_1+V_2 显然是非空的．其次，如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2$，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_1\in V_1,\boldsymbol{\beta}_2\in V_2.$$

那么

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2).$$

· 258 ·

又因 V_1, V_2 是子空间，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2\in V_2.$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2.$$

同样，

$$k\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1+V_2.$$

所以，V_1+V_2 是 V 的子空间. ▌

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$。求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

证明：构造函数 $F(x)=xf(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在在 $(0,1)$ 内可导，又满足 $F(0)=F(1)=f(1)=0$，对它利用罗尔定理，故至少存在一点存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，从而有 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 一页长方形白纸，要求印刷面积占 $A\,cm^2$，并使所留页边空白为：上部与下部宽度之和为 $h\,cm$，左部与右部之和为 $r\,cm$，试确定该页纸的长 (y) 和宽 (x)，使得它的总面积为最小。

$\boldsymbol{x=\sqrt{\dfrac{Ah}{r}}+h, y=\sqrt{\dfrac{Ar}{h}}+r}$ 驻点唯一，又根据问题的实际意义知，面积存在最小值，故

当 $\boldsymbol{x=\sqrt{\dfrac{Ah}{r}}+h, y=\sqrt{\dfrac{Ar}{h}}+r}$ 面积最小。

数学与应用数学模拟试卷答案（三）

一、填空题 （每题 5 分，共 40 分）

1. 2　　2. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$　　3. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{x-1}{3}$

4. $f(x)=e^x(x+2)$　　5. $y=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{\pi}{4}$.

6. 0　　7. 绝对收敛

8. $\frac{z^2}{1-xz}$

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. A　2. B　3. A　4. A　5. C　6. B　7. D　8. C

三、判断正误（每题 5 分，共 40 分）

1. √　2. √　3. √　4. √　5. √　6. √　7. ×　8. ×

四、计算题（每题 20 分，共 100 分）

1. 解：由 $AB=A+B$ 可得 $(A-E)B=A$。经计算 $|A-E|=-1\neq 0$，因此，矩阵 $A-E$ 可逆。所以，$B=(A-E)^{-1}A$。

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

所以，$B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$。

2. 解：对系数矩阵 A 作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&-14&10&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{cases}x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4\\x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

所以基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，$\left(c_1,c_2\in R\right)$

3.解：设$\vec{s}=\left(1\quad -2\quad 4\right)\times\left(3\quad 5\quad -2\right)=\left(-5\quad 14\quad 11\right)$

则平面方程为

$$5(x-2)-14y-11(z+3)=0$$

4.解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+2xf_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'x+2yf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(f_{11}''x+2yf_{12}'')+2x(f_{21}''x+2yf_{22}'')$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+4xyf_{22}''$$

5.解：添加辅助线 OA：$y=0,0\le x\le a$，使之与$\overset{\frown}{AO}$构成一个封闭曲线，记围成的区域为D.

$P=e^x\sin y-2y,Q=e^x\cos y-2,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$

利用格林公式得

$$I=\int_{\overset{\frown}{AO}+\overline{OA}}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\iint_D 2d\sigma-0=\frac{\pi}{4}a^2$$

五、证明题（40 分）

1．证明 设 A 可逆，则 A^{-1} 存在，且 A^{-1} 也是 V 的线性变换，

若 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性相关，则 $A^{-1}(A\varepsilon_1),A^{-1}(A\varepsilon_2),\cdots,A^{-1}(A\varepsilon_n)$，,

即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也线性相关，这与假设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是基矛盾，故 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关。

反之，若 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关，因 V 是 n 维线性空间，故它也是 V 的一组基，

故对 V 中任意向量 α_1 有 $\alpha_1=A(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n)$，即存在 $\alpha\ =(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n)$，使 $A(\alpha)=\alpha_1$，故 A 为 V 到 V 上的变换。

若又有 $\beta=l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2+\cdots+l_n\varepsilon_n$，使 $A(\beta)=\alpha_1$，

即 $A\beta=l_1A\varepsilon_1+l_2A\varepsilon_2+\cdots+l_nA\varepsilon_n\ =(k_1A\varepsilon_1+k_2A\varepsilon_2+\cdots+k_nA\varepsilon_n)$，因为 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 是基，$l_i=k_i,(i=1,2,\cdots,n)$，即 $\alpha=\beta$，从而 A 又是一一的变换，故 A 为可逆变换。

2.证明.$\because AX=0$ 有非零解当且仅当 $|A|=0$

又B的列向量均为 $AX=0$ 的解向量，故存在非零矩阵B使AB=0的充分必要条件为|A|=0.

证明：设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

3.

证明：令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$， 则有 $dx=-dt$，于是有

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 求平面 $z=0$，圆柱面 $x^2+y^2=2x$，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的曲顶柱体的体积。

解 其体积 $V=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D: x^2+y^2 \le 2x$。

设 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$。$D: r\le 2\cos\varphi, -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$。故

$$V=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=\frac{32}{9}.$$

数学与应用数学模拟试卷答案（四）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. $-\left(A+E\right)$；　2. $\left(0,-1,2\right)^T$；　3. $\boldsymbol{k=2}$　4. -2　5. $\dfrac{2}{3}$

6. $\dfrac{\pi}{4}$　7. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}, -1\le x<1$

8. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.D　2.A　3.A　4.B　5.A　6.B　7.C　8.A

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1.√　2.√　3.√　4.×　5.×　6.×　7.×　8.√

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1．解：此方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 A 的秩等于 B 的秩，都为 3，因此该方程组有解。对应齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,2,1,0)'$，而容易求得该方程的一个解 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-8,0,6)'$，所以该方程组的通解为 $\eta=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}=k(-1,2,1,0)'+(3,-8,0,6)'$。

2.解：初等行变换矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$ 到行最简梯矩阵为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\-1&1&-1&2&0\\0&5&-2&5&7\\4&6&0&2&14\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得到 β_1,β_2 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且

$$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

3.解： 已知二平面的法向量为$n_1=(2,1,0),n_2=(0,1,2)$，其数量积是交线L的方向向量s，即

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2i-4j+2k$$（在所求平面上）点M（2,0,0）在交线上，该点与点$M_0(2,-1,-1)$所确定的向量MM_0=（0,1,1）在所求平面上，则所求平面的法向量为$n'=\overrightarrow{M_0M}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=6i+2j-2k=2\{3,1,-1\}$，取法向量n=（3,1,-1），则所求平面方程为3（x-2）+y-z=0，即3x+y-z-6=0.

4.

分析 由于积分区间关于原点对称，因此首先应考虑被积函数的奇偶性.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$. 由于$\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$是偶函数，而$\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$是奇函数，有$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=0$，于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=4\int_0^1 dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

由定积分的几何意义可知$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1 dx-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi.$$

5.

解 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2+x}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

$0<x<2$

五、证明题（每小题 20 分，共 40 分）

1. 设 ξ 是 n 维列向量，且 $\xi^T\xi=1$，若 $A=E-\xi\xi^T$，证明：$|A|=0$。

证明：$A=E-\xi\xi^T\Rightarrow A\xi=E\xi-\xi\xi^T\xi=0$，

由于 $\xi^T\xi=1$，所以 $\xi\neq 0$， $Ax=0$ 有非零解，

所以 $|A|=0$

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示。

证明：充分性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，任一 n 维向量都可由它们线性表示。因此有 E 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，因此有

$n=R(E)\le R(A)\le n\Rightarrow R(A)=n\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

必要性：$\forall b\in R^n$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 线性相关，即

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=b$ 有惟一解，所以向量 b 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，由 b 的任意性可得任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示。

证明数列$a_n=\frac{\cos1}{1^2}+\frac{\cos2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$是收敛的。

3.

证明：因为对$\forall n,p\in N_+$，有

$$|a_{n+p}-a_n|=|\frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}+\frac{\cos(n+p-1)}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2}|$$

$$\le|\frac{1}{\mathrm{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}|$$

$$\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

所以对$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当$n>N,\forall p\in N_+$有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 一容器的内表面为由$y=x^2$绕 y 轴旋转而形成的旋转抛物面，其内现有水π（m^3），若再加水7π（m^3），问水位升高了多少米？

解 当体积为π时，此时高为h，旋转抛物面的体积为$v=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h ydy=\frac{1}{2}\pi h^2=\pi$，$h^2=2$，$h=\sqrt{2}$

设水位再升高l,由题意$\pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+l}ydy=7\pi$，解得$l=4-\sqrt{2}$

数学与应用数学模拟试卷答案（五）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 1； 2. 6； 3 $x+y+z=2$.

4. -6

5. $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$

6. $\mathbf{(2,6)}$， 4

7. $\mathbf{2(1+t^2)}$

8. $I=\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. D　2.D　3.C　4.C　5.A　6.D　7.D　8.D

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1. √　2. ×　3. ×　4. ×　5. √　6. ×　7. √　8. ×

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1. 解：$AA^{-1}X\cdot AA^{-1}=AX\cdot A\cdot A^{-1}+2A\cdot A\cdot A^{-1}$，

$$\Rightarrow X=AX+2A\Rightarrow (E-A)X=2A,$$

$$\Rightarrow X=(E-A)^{-1}\cdot 2A=\begin{pmatrix}-6&10&4\\-2&4&2\\-4&10&0\end{pmatrix}。$$

2. 解：①因为非零矩阵 B 的每一列都是齐次方程组的解，所以齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 有非零解，即 $\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda+4=5\Rightarrow \lambda=1$

②由题意可得 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}B=0\Rightarrow R(B)+R(A)=n=3$，

因为 $R(A)>1$，所以 $R(B)<3$，即 B 不可逆，所以 $|B|=0$

3. 解：直线上的点 N（1，-2，0）及已知点 M（3，1，-2）在所求平面上，两点构成向量 $\overrightarrow{NM}=(2,3,-2)$，直线方向向量 s=（2，1，3）；所求平面的法向量 $n\perp\overrightarrow{NM},n\perp s,$ 于是

可取 $n=\overrightarrow{NM}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-7i+2j-4k$，故所求平面方程为

$-7(x-3)+2(y-1)-4(z+2)=0$，即 $7x-2y+4z=11$。

4.

解：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$……………(1)

又 $y\ln x=x\ln y$ 两边对 x 求导得 $y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+\dfrac{x}{y}\cdot y'$

解得 $y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$…………………(2)

把（2）代入（1）得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{xy\ln y+y^2}{xy\ln x-x^2}$$

5.

解 设 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，显然 $a_n>0$，所以是正项级数；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛；

或者由 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{n^{3/2}}+o(\dfrac{1}{n^{3/2}})\sim\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n^{3/2}}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛。

五、证明题（40 分）

1. 证明：设$\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

令$\mathbf{B}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$，$\mathbf{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$\mathbf{k}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，

则上式可写为$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{k}$，而$\mathbf{k}=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以$\mathbf{k}$可逆

所以$R\left(\mathbf{B}\right)=R\left(\mathbf{A}\right)$，又知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

所以.$2\alpha_1+3\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$线性无关。

2. 证明：因为n阶对称矩阵A正定，所以$|A|>0, A'=A$，并对任意的非零列向量 X，恒有$X'AX>0$，从而

$$\begin{aligned}X'A^*X&=X'|A|A^{-1}X=(\sqrt{|A|}X')A^{-1}(\sqrt{|A|}X)=Y'A^{-1}Y\\&=(A^{-1}Y)'A(A^{-1}Y)>0\end{aligned}$$

3.

证：由积分中值定理，$\exists c\in[\frac{2}{3},1]$, 使得

$3\cdot f(c)\cdot(1-\frac{2}{3})=f(c)=f(0)$，

又$\because[\frac{2}{3},1]\subset(0,1)$,

$\therefore$ 在 $[0,c]$ 上存在两点满足罗尔中值定理条件. $[0,c]\subset[0,1]$，

$\therefore$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 一艘轮船在航行中的燃料费和它的速度的立方成正比。已知当速度为 10（公里/小时）时燃料费为每小时 6 元，而其他与速度无关的费用为每小时 96 元。问轮船的速度为多少时，每航行一公里的费用最小？。

解：设船速为 x（km/h），据题意，每航行一小时的耗费为 $y=\dfrac{1}{x}(kx^3+96)$

$x=10$ 时，$k\cdot 10^3=6$，故得 $k=0.006$。

令 $y'=\dfrac{0.012}{x^2}(x^3-800)=0$ 得稳定点 $x=20$。

由第一充分条件知 $x=20$ 是极小值点。

$y_{\min}=0.006\times 20^2+\dfrac{96}{20}=7.2$（元）

数学与应用数学模拟试卷答案（六）

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. 0　2. 21　3. 1

4. $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

5. $(x+y)(1+2^{xy}\ln 2)$

6. $\dfrac{1-2\ln x}{x}+C$

7. $1+\sqrt{2}$

8. $\frac{1}{4}$

二、选择题（每题 5 分，40 分）

1.A　　2.D　　3.A　　4.A　　5.B　　6.A　　7.C　　8. B

三、判断正误（每题 5 分，共 15 分）

1. √　　2. √　　3. ×　　4. ×　　5. ×　　6. √　　7. ×　　8. √

四、计算题（每题 20 分，共 100 分）

1. 解.f(x)可能的有理根为$\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$，由综合除法知 2 为 f(x)的单根,

且 f(x)在实数域上的分解式为

$$f(x)=(x-2)(x^2-4x+7)$$

2. 解：$\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\2&3&1&1&1\\3&2&1&-1&1\\2&2&2&-1&1\\5&5&2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\0&-1&-5&3&-1\\0&0&6&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1+x_4\\-x_2-5x_3=-1-3x_4\\6x_3=1+5x_4\end{cases}$　特解$\begin{pmatrix}1/6\\1/6\\1/6\\0\end{pmatrix}$　基础解$\begin{pmatrix}5/6\\-7/6\\5/6\\1\end{pmatrix}$

通解$k\begin{pmatrix}5/6\\-7/6\\5/6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/6\\1/6\\1/6\\0\end{pmatrix}$。

3..解：直线$\frac{x+2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{-1}$的方向向量为$\overrightarrow{v_1}=\{1,0,-1\}$，在其上取点$M_1\{-2,0,2\}$，

直线$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-7}{1}$的方向向量为$\overrightarrow{v_2}=\{1,5,1\}$，在其上取点$M_2\{3,-2,7\}$，

从而 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{5,-2,5\}$，

$$\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|=\left\{\begin{vmatrix}0&-1\\5&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&5\end{vmatrix}\right\}=\{5,-2,5\}$$

所以 两异面直线之间的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}5&-2&5\\1&0&-1\\1&5&1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{25+25+4}}=\frac{54}{\sqrt{54}}=\sqrt{54}.$$

其公垂线方程为
$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x+2&y&z-2\\1&0&-1\\5&-2&5\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}x-3&y+2&z-7\\1&5&1\\5&-2&5\end{vmatrix}=0\end{cases},$$

化简整理为 $\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0.\end{cases}$

4. 解
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\cos x^4\cdot2x}{(e^{x^5}-1)5x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x^4)}{x^5\cdot5x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{5}.$$

5. 解： $f(0)=2$，得$d=2$，

$f'(0)=(3ax^2+2bx+c)\big|_{x=0}=0$，得 $c=0$，

$f''(-1)=(6ax+2b)\big|_{x=-1}=-6a+2b=0$

$f(-1)=-a+b-c+d=-a+b+2=4$，

解得 $a=1$， $b=3$，

因为 $f''(0)=2b=6>0$， 故 $f(0)$ 是极小值.

五、证明题（每题 20 分，共 40 分）

1. 设有 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 根据条件可以得出

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+k_3=0\\k_1+k_2+3k_3=0\end{cases}$$ 只有 0 解 $k_1=k_2=k_3=0$ 得证.

2. $A(A-E)=2E$ $\quad |A||A-E|\neq 0$ A 可逆 $\quad \left||A+2E|\right|=|A|^2\neq 0$ $\quad A+2E$ 可逆 $A\dfrac{1}{2}(A-E)=E$ $\quad \therefore A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$

$A+2E=A^2$ $\quad \therefore (A+2E)^{-1}=(A^{-1})^2=\dfrac{(A-E)^2}{4}=\dfrac{3E-A}{4}$

3. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^1 e^{x^2}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个不同实根

证明：设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+\int_0^1 e^{x^2}dx$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$

令 $f'(x)=0$， 得 $x=e$

$f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 单调

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$f(e)=\int_0^1 e^{x^2}dx>0$$

故 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内各有一不同实根，

所以方程在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同实根。

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $\boldsymbol{x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt}$ 其中 $\boldsymbol{0\le t\le 2\pi}$ ，它的线密度为 $\boldsymbol{\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2}$ 求其质量。

解：$$\boldsymbol{M=\int_L \rho ds=\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+kt^2)\sqrt{a^2+k^2}dt}$$

$$\boldsymbol{=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)}$$

数学与应用数学模拟试卷答案（七）

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. 6；2．-6；3. $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

4. $dz=\frac{2x}{e^z-1}dx+\frac{2y}{e^z-1}dy$

5. $\boldsymbol{\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy}$

6. $\boldsymbol{y=3}$

7. 设 $\boldsymbol{f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$，则 $\boldsymbol{f'(x)=0}$ 有______个根。3

8. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt=$______. 　　$2x\sqrt{1+x^6}$

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1．D　2.D　3.C　4.C　5.A　6.B　7.B　8.C

三、判断正误（每题 5 分，共 25 分）

1.×　2.√　3.√　4.×　5.√　6.√　7.√　8.×

四、计算题（每题 20 分。共 100 分）

1.解：由 $A^2-AB=E$ 可得 $B=A-A^{-1}$，而 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，所以有

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2.解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&-3&6&-9\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$， 所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=2$，任意两个不成比例的向量组均是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个基，维数为 2.

3.解：设所求平面方程为 $5x-14y+2z+D=0$.取已知平面上的一点（-4,0，-8），依

题意有 $\frac{\left|5\times(-4)-14\times0+2\times(-8)+D\right|}{\sqrt{25+144+2}}=\frac{\left|D-36\right|}{15}=3$，可得 D=81 或-9，

代入得所求平面方程为 $5x-14y+2z+81=0$，或 $5x-14y+2z-9=0$

化为法式方程，取 $\boldsymbol{\lambda=\frac{1}{\sqrt{5^2+14^2+2^2}}=\frac{1}{15}}$

则法式方程为 $\boldsymbol{\frac{1}{3}x-\frac{14}{15}y+\frac{2}{15}z-\frac{3}{5}=0}$。

4. 解：$\iint\limits_D \frac{1}{y^2+x}dxdy=\int_0^1\int_0^y\frac{1}{y^2+x}dxdy=\int_0^1\ln(x+y^2)\big|_0^y\,dy$

$=\int_0^1\ln(1+y)dy-\int_0^1\ln y\,dy$

$=[(1+y)\ln(1+y)-(1+y)-y\ln y+y]\big|_0^1=2\ln 2$

5. 解：易求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛半径 R=1，收敛域为 $(-1,1)$。

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},x\in(-1,1)$，则 $\forall x\in(-1,1),\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， 而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，

故 $\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2}$，从而 $f(x)=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$。

五、证明题（40 分）

1. 设 A 为对称矩阵，B 为反对称矩阵，且 A,B 可交换，$A-B$ 可逆，证明：$(A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交矩阵。

证明：A 为对称矩阵 $\Rightarrow A^T=A$，B 为反对称矩阵 $\Rightarrow B^T=-B$

A,B 可交换 $\Rightarrow AB=BA\Rightarrow (A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$

$$\left((A+B)(A-B)^{-1}\right)^{T}(A+B)(A-B)^{-1}=\left((A-B)^{-1}\right)^{T}(A+B)^{T}(A+B)(A-B)^{-1}$$
$$=(A+B)^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}=E$$

所以 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交矩阵

2. 证明：（1） $R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ 可知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 α_2,α_3 线性无关。

而 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_1 能用 α_2， α_3 线性表示。

（2）证明：带入验证满足方程

证明不等式: $2^x\ge 1+x^2, x\in[0,1]$.

3.

证：令 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f(0)=f(1)=0$, 对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$f'(x)=2^x\ln 2-2x \quad , \quad f''(x)=2^x\ln^2 2-2<0$$

因此 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减且连续，又

$$f'(0)=\ln 2>0, f'(1)=2\ln 2-2<0.$$

故由介值定理知存在 ξ, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

那么在 $[0,\xi]$ 上 $f(x)$ 单调递增， 在 $[\xi,1]$ 上 $f(x)$ 单调递减.

因此 $f(x)$ 可在端点处取得最小值， 又 $f(0)=f(1)=0$.

所以在 $[0,1]$ 上

$f(x)\ge 0$， 即 $2^x\ge 1+x^2, x\in[0,1]$.

六、应用题（本题 0 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

19. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形的面积为 S_2，并且 $a<1$.

(1) 试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2) 求该最小值所对应的图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解 (1) 由题意知 $S_1=\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx=\frac{a^2}{6}, S_2=\int_0^1\left(x^2-ax\right)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{6}$，故

$S_1+S_2=\frac{a^2}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$，用导数方法易知，当 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，取到最小值 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(2) $V_x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\pi\left[\left(x^2\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]dx=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$

数学与应用数学模拟试卷答案（八）

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. 0　　2. $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$　　3. 平行　　4. 2　　5. $\frac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$

6. $Q=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$　　7. $\frac{e}{2}-1$　　8. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. A　2. C　3. C　4. A　5. D　6. B　7. D　8. D

三、判断正误（每题 5 分，共 40 分）

1. ×　2×　3 √　4. √　5. ×　6. ×　7. √　8. ×

四、解答题（每题 20 分，共 100 分）

1. 解： $|A|=\begin{vmatrix}2 & \lambda & -1\\ \lambda & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)$ 由克莱姆法则

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$时，方程组有唯一解；

当$\lambda=-\dfrac{4}{5}$时

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}2 & -\dfrac{4}{5} & -1 & 1\\ -\dfrac{4}{5} & -1 & 1 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}10 & -4 & -5 & 5\\ -4 & -5 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

有$r(A)\neq r(A,b)$，所以方程组无解；

当$\lambda=1$时

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

有$r(A)=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多组解，原方程组等价于方程组为

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2-x_3=-1\end{cases}$$

取$x_3=0$，得到特解$\eta=(1,-1,0)^T$

令$x_3=1$，代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$$\xi=(1,0,1)^T$$

方程组的全部解为$x=\eta+k\xi$ 其中k为任意常数

2.解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

又对应 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

正交化得 $\alpha_1=p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=p_2-\dfrac{(p_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

再单位化 $q_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $q_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,

而对应 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 单位化得 $q_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 故正交线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化为二次型为 $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

3. 求过直线 $\boldsymbol{L_1}: \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{y+2}}{\boldsymbol{3}} = \frac{\boldsymbol{z+3}}{\boldsymbol{4}}$ 切平行于直线 $\boldsymbol{L_2}: \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{2}}$ 的平面方程

解：M_0（1，-2，-3）

$$\vec{n} = \overrightarrow{S1} \times \overrightarrow{S2} = \begin{vmatrix} \vec{2} & \vec{0} & \vec{x} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =（2,0，-）$$

平面方程为 2（x-1）-（z+3）=0

即 2x-z-5=0

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\tan x(e^x - 1)\ln(1-x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{\tan x(e^x-1)\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-x^2} = -\frac{1}{2}$$

5. 计算 $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 5} dx$

$$\int \frac{x}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}+2\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+2\arctan(x-2)+C$$

五、证明题（40 分）

1. 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，整理得 $(-k_1+k_2-k_3)\alpha_1+(k_2-k_3)\alpha_2+(k_1+k_3)\alpha_3=0$ 由于

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是基，于是有

$$\begin{cases}-k_1+k_2-k_3=0\\ k_2-k_3=0\\ k_1+k_3=0\end{cases}$$

该方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，故 β_1,β_2,β_3 线性无关，从而是基。

（2）由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，其中 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$。

于是 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}$，故由基 β_1,β_2,β_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$C=A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$，即 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,4,2)'$

2. 证明： 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向

量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，因此$\alpha_4$可唯一的由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；.... 2 分

假设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩不为 4，又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 3，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 3，因此$\alpha_5-\alpha_4$也可唯一的由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；... 4 分

因此α_5可唯一的由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为 4，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，因此$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，矛盾，因此向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4。

3. 按$\varepsilon-N$定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}$$

证　$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{3n+4}{3(3n^2-2)}\right|\leqslant\frac{4n}{3\cdot 2n^2}\quad (n>4)$$

$$=\frac{2}{3n},$$

取$N=\max\left\{\left[\frac{2}{3\varepsilon}\right]+1,4\right\}$，当 n>N 时，

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon.$$

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 把由$y=e^{-x}$，x 轴，y 轴和直线$x=\varepsilon\ (\varepsilon>0)$所围平面图形绕 x 轴旋转得一旋转体，求此旋转体的体积$V(\varepsilon)$，并求满足条件$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}V(\varepsilon)$的$a$.

解：$\boldsymbol{V(\varepsilon)=\pi\int_0^{\varepsilon}(e^{-x})^2dx}$

$$=\pi\int_0^{\varepsilon} e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\pi e^{-2x}\Big|_0^{\varepsilon}=\frac{1}{2}\pi(1-e^{-2\varepsilon})$$

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}V(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{1}{2}\pi(1-e^{-2\varepsilon})=\frac{\pi}{2}$$

若$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+\infty}V(\varepsilon)$，即$\frac{1}{2}\pi(1-e^{-2a})=\frac{\pi}{4}$，

解得 $a=\frac{\ln 2}{2}$

数学与应用数学模拟试卷答案（九）

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$　　2. 0　　3. $b=-1$　　4. $a=1$.

5. -4　　6. 2　　7. $\frac{\pi}{2}a^4$　　8. 0

二、单项选择题 （每题 5 分，共 40 分）

1. C　2. A　3. A　4. D　5. D　6. C　7. D　8. A

三、判断正误（每题 5 分，共 40 分）

1. ×　2. √　3. √　4. ×　5. √　6. √　7. ×　8. √

四、计算题（其它每题 20 分，共 100 分）

1. 解：由 $r(A,b)=\begin{pmatrix}3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&3\\1&1&1&1&1&1\\5&4&3&3&-1&a\end{pmatrix}\to\cdots$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组有无穷多组解，所以 $r(A)=r(A,b)=2$，故 $a=2$

$r(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 原方程组等价于方程组

$$\begin{cases}x_1=-2+x_3+x_4+5x_5\\x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$$

取 $x_3=x_4=x_5=0$，得到特解 $\eta=(-2,3,0,0,0)^T$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，分别代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$$\xi_1=(1,-2,1,0,0)^T,\quad \xi_2=(1,-2,0,1,0)^T,\quad \xi_3=(5,-6,0,0,1)^T$$

方程组的全部解为

$$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$$ 其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

2. **解**（1）

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\5-\lambda&1-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$=(5-\lambda)(\lambda+1)^2$

$\lambda=-1$时,$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得特征向量：

$\xi=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+K_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\neq 0$

$\lambda=5$时,$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-4&2\\-4&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得特征向量：

$\xi=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $k\neq 0$,

（2）可以对角化

可逆矩阵为$p=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，对角矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}^k$，

3. 解：设过$P(1,1,1)$与直线L垂直的平面方程为$2(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$，

即 $2x+y-3z=0$

直线L：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$与平面的交点为$(-\dfrac{6}{7},-\dfrac{3}{7},-\dfrac{5}{7})$

所求直线方程为：$\dfrac{x-1}{13}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z-1}{12}$.

4.

分析　被积函数中含有抽象函数的导数形式，可考虑用分部积分法求解.

解　由于 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\cos xdx=\int_0^{\pi}f(x)d\sin x+\int_0^{\pi}\cos xdf'(x)$

$$=\{\left[f(x)\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sin xdx\}+\{[f'(x)\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\sin xdx\}$$

$$=-f'(\pi)-f'(0)=2\ .$$

故 $f'(0)=-2-f'(\pi)=-2-3=-5$.

5. 解：幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=-1$ 处收敛，而在 $x=1$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad x\in(-1,\ 1)$$

即逐项求积分可得 $\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt,\ x\in(-1,1)$

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1).$$

五、证明题（40 分）

1. 证明：$c_1\alpha+c_2\beta=0\Rightarrow c_1A\alpha+c_2A\beta=0$

$\Rightarrow c_2b=0\Rightarrow c_2=0$

$\Rightarrow c_1\alpha=0,\alpha\neq0\Rightarrow c_1=0$

α,β 线性无关

2. 证明：　对任意 n 阶方阵 A，证明：$A+A^T$ 为对称矩阵，$A-A^T$ 为反对称矩阵，且 A 可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

证明：$\left(A+A^T\right)^T=A^T+\left(A^T\right)^T=A+A^T$　　$\therefore A+A^T$ 为对称矩阵。

$\left(A-A^T\right)^T=A^T-\left(A^T\right)^T=-\left(A-A^T\right)$　$\therefore A-A^T$ 为反对称矩阵。

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$$

证明不等式 $\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}<\int_0^2 e^{x^2-x}dx<2e^2$.

3.

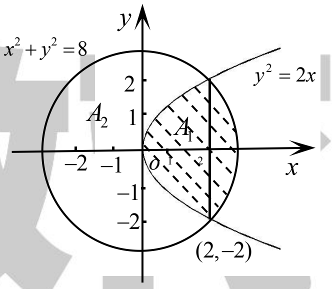
证 令 $f(x)=e^{x^2-x}$,则由 $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$.又 $f(0)=1,\ f(2)=e^2$,

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$,所以 f 在 $[0,2]$ 上的最大值 $M=e^2$,最小值 $m=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.由估值定理可得

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2\frac{1}{\sqrt[4]{e}}dx<\int_0^2 e^{x^2-x}dx<\int_0^2 e^2dx=2e^2.$$

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2=8$ 分成两部分，求两部分面积之比.



解：抛物线 $y^2=2x$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 的交点分别为

$(2,2)$ 与 $(2,-2)$，如图所示，抛物线将圆分成两个部分 A_1，

A_2，记它们的面积分别为 S_1，S_2，则有

$S_1=\int_{-2}^{2}(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2})dy=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+2\pi$，$S_2=8\pi-A_1=6\pi-\frac{4}{3}$，于是

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4}{3}+2\pi}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

数学与应用数学模拟试卷答案（十）

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. 1　2. $A_{11}+A_{12}+\cdots\cdots A_{1n}=(x-a)^{n-1}$　3. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$　4. $k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$

5. $\frac{1}{x^2}$　6. $\mathbf{-1}$　7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　8. $\frac{\ln 3}{2}$

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. D　2. A　3. A　4. A　5. B　6. B　7. D　8. B

三、判断正误（每题 5 分，共 40 分）

1. ×　2. ×　3. √　4. ×　5. √　6. ×　7. ×　8. √

四、计算题（每题 20 分，共 100 分）

1. 解：（1）$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$,

$\lambda=3$ 时有解；

其全部解为：(1,0,0,0)+k(-1,1,0,0)+t(-1,0,-4,5)，其中 k,t 为任意数.

2. 解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}17-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 14-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 14-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-9)(\lambda-18)^2=0$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=18$

当 $\lambda_1=9$ 时，解方程 $(9E-A)x=0$，得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 时，解方程 $(18E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

得将向量组正交化、单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{45}}\\-\frac{4}{\sqrt{45}}\\\frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$

得正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$

通过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$，化成标准型 $f=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$

3. 解：已知点 A（3，-2，9），B（-6，0，4）确定的向量 $\overrightarrow{AB}$ =（-9，2，-5）与已知平面的法向量 $n_1=(2,-1,4)$ 可定所求平面的法向量 n，

$n=\overrightarrow{AB}\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3i+26j+5k$，过点（3，-2，9），则所求平面的点法式方程为$3(x-3)+26(y+2)+5(z-9)=0$，即$3x+26y+z=0$。

4.

解：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

又　由$y\ln x=x\ln y$两边对x求导得$y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+\dfrac{x}{y}\cdot y'$

解得　$y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$

把（2）代入（1）得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{xy\ln y+y^2}{xy\ln x-x^2}$$

5.

解：令$\sin x=u$，上式$=\displaystyle\int\frac{1-2u^2+u^4}{u^4}du$

$$=\int(u^{-4}-2u^{-2}+1)du=-\frac{1}{3}u^{-3}+2u^{-1}+u+C$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C$$

五、证明题（40分）

1．证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，根据定义，存在不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，用矩阵$A$左乘等号两边得到

$$Ak_1\alpha_1 + Ak_2\alpha_2 + \cdots + Ak_s\alpha_s = k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0$$

k_i 不全为 0，根据线性相关的定义

得到向量组 $k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_s\alpha_s$ 线性相关.

2. 解：由 $k_1x^3 + k_2(x^3+x) + k_3(x^2+1) + k_4(x+1) = (k_1+k_2)x^3 + k_3x^2 + (k_2+k_4)x + (k_3+k_4) = 0$ 得：

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 向量组线性无关，

所以 $x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$ 是 $P[x]_3$ 中的一个基

令 $a_1x^3 + a_2(x^3+x) + a_3(x^2+1) + a_4(x+1) = x^2+2x+3,$

解得 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2$

所以多项式 x^2+2x+3 在这个基下的坐标为 $(0,0,1,2)^T$.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

3.

证明：设三个级数的部分和分别是 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{S_n\}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_{2n} &= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty}[(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})] = \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = A + B$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A + B$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 求由曲线 $y = \frac{1}{2}x$，$y = 3x$，$y = 2$，$y = 1$ 所围成的图形的面积.

解：选取 y 为积分变量，其变化范围为 $y \in [1, 2]$，则面积元素为

$$dA=|2y-\frac{1}{3}y|dy=(2y-\frac{1}{3}y)dy.$$

于是所求面积为 $A=\int_1^2(2y-\frac{1}{3}y)dy=\frac{5}{2}$.

数学与应用数学模拟试卷答案（十一）

一、填空题(每题 5 分，共 40 分)

1. $(1,1,-1)$　　2. $R(AB)=2$　　3. ± 30　　4. π.

5. 1　　6. $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{xy}\left[\frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{y}\ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\right]$

7. $[1,+\infty)$　　8. $-\frac{1}{2\pi}$

二、单项选择题(每题 5 分，共 40 分)

1.C　2. A　3.B　4.C　5.B　6.A　7.B　8.A

三、判断正误(每题 5 分，共 40 分)

1. √　2. ×　3. √　4. ×　5. ×　6. ×　7. √　8. ×

四、计算题（每题 20 分，共 100 分）

1..解：（1）设方程组有唯一解，则系数行列式不等于 0，即

$$\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3+\lambda)\lambda^2$$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，方程组有唯一解。

（2）当 $\lambda=0$ 时，增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\therefore R(A)=1, R(B)=2$, 故方程组无解，

（3）当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=R(B)=2$, 故方程组有无穷多个解，且通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\qquad (c\in R)$$

2. 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

$\therefore$ A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，

$$|2E-A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{vmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=6$ 时

$$|6E-A|=\begin{vmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

故 A 可对角化，存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

3.（1）设所求的平面为 $(4x-y+3z-1)+\lambda(x+5y-z+2)=0$

欲使平面通过原点，则须 $-1+2\lambda=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

故所求的平面方程为

$$2(4x-y+3z-1)+(x+5y-z+2)=0$$

即 $9x+3y+5z=0$.

（2）同（1）中所设，可求出 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

故所求的平面方程为 $5(4x-y+3z-1)+(x+5y-z+2)=0$

即 $21x+14z-3=0$.

（3）如（1）所设，欲使所求平面与平面 $2x-y+5z-3=0$ 垂直，则

$$2(4+\lambda)-(-1+5\lambda)+5(3-\lambda)=0$$

从而 $\lambda=3$，所以所求平面方程为

$$7x+14y+5=0.$$

4. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向。

解 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，记 L 围城的区域为 D.

$(0,0)$ 在圆内，是奇点，选取适当小的 $r>0$，作位于 D 内的圆周 l: $x^2+y^2=r^2$. 记 L 和 l 所围城的区域为 D_1。对复连通区域为 D_1 应用格林公式，得

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

其中 l 的方向取逆时针方向。于是

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$$

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域及其和函数.

解：易求得 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径 R=1，收敛域为 $(-1,1]$。

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},x\in(-1,1]$。

则当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{1}{1+x}$。

由此积分 $f(x)=\ln(1+x),x\in(-1,1)$。

又 $f(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2$，故 $f(x)=\ln(1+x),x\in(-1,1]$。

五、证明题（40 分）

1. 证明：设 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$，将 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ 代

入，得

$$(k_2+k_3+\cdots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\alpha_2+\cdots+(k_1+k_3+\cdots+k_{m-1})\alpha_m=0$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性无关，得线性方程组：

$$\begin{cases} \quad k_2+k_3+\cdots+k_m=0 \\ k_1 \quad +k_3+\cdots+k_m=0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ k_1+k_3+\cdots+k_{m-1} \quad =0 \end{cases}$$

它得系数行列式

$$\mathrm{D}_m=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=(m-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(m-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}=(-1)^{m-1}\neq 0$$

所以齐次线性方程组（1）只有零解，即$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$。故

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关.

2.（1）证明　只需$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$与$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$等价（二者相互表示）

由于$\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3=0$则$\vec{\alpha}_1=-2\vec{\alpha}_2-3\vec{\alpha}_3$即$\vec{\alpha}_1$,可由$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$又$\vec{\alpha}_2$,可由$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$同理可证$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$与$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$

（2）只需证明$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$的秩为 2

若$f(x)$在$[a,b]$可导，$a<f(x)<b$,且$\forall x\in(a,b)$, $f'(x)\neq 1$，

3. 证明：方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 有且只有一个根.

证明：（1）设 $F(x)=f(x)-x$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续得：$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

又 $\because \forall x\in(a,b), a<f(x)<b$ 得：$F(a)>0, F(b)<0$

故由根的存在定理知：至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $F(x_0)=f(x_0)-x_0=0$

即：方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 至少有一个根.

（2）假设方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 有两个根，

即 $\exists x_1\in(a,b), x_2\in(a,b)$，使 $F(x_1)=F(x_2)=0$

由 $f(x)$ 在 (a,b) 可导得：$F(x)$ 在 (a,b) 可导

故由罗尔中值定理知：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$ 即：$f'(\xi)=1$，这与“$\forall x\in(a,b), f'(x)\neq 1$”矛盾！

故方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 只能有一个根. 综（1）（2）命题得证.

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围图形的面积

解 利用对称性，所围图形的面积为

$$S=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(2\cos^2\frac{\theta}{2})^2d\theta=4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 udu=\frac{3}{2}\pi a^2$$

数学与应用数学模拟试卷答案（十二）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. $X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$　　2. $a=0$；

3. $-\frac{3}{2}$；　　4. $x^2-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}=1$

5. $\frac{\pi}{4}$　　6. $y\geq x>0, x^2+y^2<1$

7. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$.　　8. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(0,+\infty)$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.C　2.D　3.D　4.A　5.C　6.C　7.D　8.A

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1.×　2.×　3.√　4.√　5.×　6.√　7.√　8.×

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1.解 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix}$

基础解系为：$\xi_1=\left(-\frac{3}{4},\frac{7}{4},0,1,0\right)^T,\xi_2=(-1,0,0,0,1)^T$，

通解为：$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$。

2. 解：相应的二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，

$\left|A-\lambda E\right| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，

当 $\lambda_1 = 9$ 时，$\left(A-\lambda E\right)x = 0 \Rightarrow \alpha = \left(1,-2,2\right)^T \Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$，

当 $\lambda_1 = 0$ 时，$AX = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \left(2,1,0\right)^T$，$\alpha_3 = \left(0,1,1\right)^T$，

Schimit 正交化得 $P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T$，$P_3 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$，

所求的正交变换为 $X = PY = \left(P_1 \quad P_2 \quad P_3\right)Y$，标准型为 $f = 9{y_1}^2$

3. 解：直线 L_1 上的点（1, 2, 3）在所求平面上；又所求平面的法线向量 n 与已知二线 $L_1.L_2$ 的方向向量 $S_1 = \left(1,2,-1\right), S_2 = \left(2,1,1\right)$ 都垂直，从而可取 $n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j + k$。

于是所求平面方程为 $\left(x-1\right) - 3\left(y-2\right) + \left(z-3\right) = 0$ 即 $x - 3y + z + 2 = 0$

4. 设函数 $Q\left(x,y\right)$ 在 xoy 面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx + Qdy$ 与路径无关，并且对 $\forall t$ 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Qdy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Qdy$，求 $Q\left(x,y\right)$。

解：由已知曲线积分与路径无关，即 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，得 $Q = x^2 + \varphi(y)$。

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Qdy=\int_0^1[t^2+\varphi(y)]dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Qdy=\int_0^t[1+\varphi(y)]dy$$

从而 $\int_0^1[t^2+\varphi(y)]dy=\int_0^t[1+\varphi(y)]dy$，

两边对 t 求导得，$2t=1+\varphi(t)$，从而得 $\varphi(t)=2t-1$，

于是 $Q=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1$。

5. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx$.

利用分部积分法.

解　由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xde^x=[e^x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$

$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$，　　　　（1）

而　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xde^x=[e^x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cdot(-\sin x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx-1$，　　　　（2）

将（2）式代入（1）式可得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx=e^{\frac{\pi}{2}}-[\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx-1]$，

故　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$.

五、证明题（40 分）

1. 证明：反证法，假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_r}$ 使得

$\boldsymbol{\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2\vec{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\vec{\alpha}_r=0}$，由于 $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_r}$ 不全为零，不防设 $\boldsymbol{\lambda_1\neq 0}$ 则

$\boldsymbol{\vec{\alpha}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{\alpha}_2-\cdots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\vec{\alpha}_r}$，故 $\boldsymbol{\vec{\alpha}}$ 可由 $\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 表示与已知矛盾，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线

性无关.

2.（1）因 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，故 A+B 是对称矩阵. 对于非零 n 维向量 x，因 A，B 正定，故 $x^TAx>0,\ x^TBx>0$，从而，

$x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx>0$，

故 A+B 是正定矩阵.

（2）假设 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$，则 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=I$，即 $AB^{-1}+BA^{-1}+I=0$，从而 $AB^{-1}A+A+B=0$. 因 B 正定，故其特征根均大于 0. 因 $(B^{-1})^T=(B^T)^{-1}=B^{-1}$，故 B^{-1} 是对称矩阵. 又因 B^{-1} 的特征值是 B 的特征值的倒数，故全大于 0. 于是 B^{-1} 也是正定矩阵，设 x 是非零 n 维列向量，

则有 $x^TAB^{-1}Ax=(Ax)^TB^{-1}(Ax)\geq 0,\quad x^TAx>0,\quad x^TBx>0$. 于是，

$x^TAB^{-1}Ax+x^TAx+x^TBx>0$，即 $x^T(AB^{-1}A+A+B)x>0$，这与 $AB^{-1}A+A+B=0$ 矛盾. 故必有 $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$.

3.证明 令 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-b_1}+\dfrac{a_2}{x-b_2}+\dfrac{a_3}{x-b_3}$，则 $f(x)$ 在 (b_1,b_2) 和 (b_2,b_3) 内连续，b_1,b_2,b_3 是 $f(x)$ 的无穷型间断点.

由 $\lim\limits_{x\to b_1^+}\dfrac{a_1}{x-b_1}=+\infty,\qquad \lim\limits_{x\to b_2^-}\dfrac{a_2}{x-b_2}=-\infty$，

则有 $\lim\limits_{x\to b_1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b_1^+}\left(\dfrac{a_1}{x-b_1}+\dfrac{a_2}{x-b_2}+\dfrac{a_3}{x-b_3}\right)=+\infty$，

$$\lim_{x\to b_2^-}f(x)=\lim_{x\to b_2^-}\left(\frac{a_1}{x-b_1}+\frac{a_2}{x-b_2}+\frac{a_3}{x-b_3}\right)=-\infty.$$

从而必存在$x_1,x_2\ (b_1<x_1<x_2<b_2)$，使$f(x_1)>0,f(x_2)<0$．对$f(x)$在$[x_1,x_2]$上应用零点定理，则$f(x)$在$(x_1,x_2)\subset(b_1,b_2)$内至少存在一个根.又由于$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(b_1,b_2)$内单调减，所以恰有一个实根.

类似证明$f(x)$在(b_2,b_3)内也恰有一个实根.

六、应用题

设$L(x,y,z)=x^3y^2z+\lambda(x+y+z-12)$

$$令\begin{cases}L_x=3x^2y^2z+\lambda=0\\L_y=2x^3yz+\lambda=0\\L_z=x^3y^2+\lambda=0\\L_\lambda=x+y+z-12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\\z=2\end{cases}$$

数学与应用数学模拟试卷答案（十三）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. $\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$　　2. $(0,-1,2)^T$　　3. 6　　4. $y+5=0$。

5. $dz=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$　　6. $\dfrac{2}{7}$

7. $(0,0)$　　8. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.D　2.A　3.A　4.B　5.C　6.A　7.B　8.A

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1.×　2.√　3.√　4.×　5.√　6.×　7.×　8.√

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1．解：此方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 A 的秩等于 B 的秩都为 3，因此该方程组有解。对应齐次线性方程组的基础解系为

$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,1,0)'$，而容易求得该方程的一个解 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-8,0,6)'$，所以该方程组的通解为

$\eta=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}=k(-1,2,1,0)'+(3,-8,0,6)'$。

2.解：先求 A 的特征值：

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-2&2-\lambda&0\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(\lambda+1)(\lambda-2)+2]$$

$$=(1-\lambda)[\lambda^2-\lambda]=(1-\lambda)\lambda[\lambda\ -1]$$

$\therefore$ 解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=0$

$$(A-0E)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&-2&1\\-2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 解得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1,(A-1E)=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得特征向量：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\quad\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以得相似变换矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\quad\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

3. 解:已知二平面的法向量为$n_1=(2,1,0),n_2=(0,1,2)$,其数量积是交线 L 的方向向量 s，即

$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=2i-4j+2k$（在所求平面上）点 M（2,0,0）在交线上，该点与点$M_0(2,-1,-1)$所确定的向量MM_0=（0,1,1）在所求平面上，则所求平面的法向量

为$n'=\overrightarrow{M_0M}\times s=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&1\\2&-4&2\end{vmatrix}=6i+2j-2k=2\{3,1,-1\}$，取法向量 n=（3,1，-1），

则所求平面方程为 3（x-2）+y-z=0，即 3x+y-z-6=0.

4.

解：因为$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x^2}$，所以由洛必达法则得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.$$

5. 解：$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\sqrt{65}dt$

$$\int_L \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{65}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8^2+t^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}\cdot\arctan\frac{t}{8}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{65}}{8}\arctan\frac{\pi}{4}$$

五、证明题（每小题 20 分，共 40 分）

1. 设η^*是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系,证明：η^*，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

证明：令$\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda_1}\cdots\boldsymbol{\lambda_n}$ 使得

$\lambda\eta^*+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$；

把上式两端分别乘以$\boldsymbol{A}$得

$\lambda A\eta^*+\lambda_1 A\xi_1+\lambda_2 A\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}A\xi_{n-r}=0$；

有$\lambda A\eta^*=0$得$\boldsymbol{\lambda=0}$ 而$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

$\boldsymbol{\lambda=_1\cdots=\lambda_n=0}$

所以$\boldsymbol{\lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0}$故$\eta^*$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关

2. 证明：充分性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，任一$n$维向量都可由它们线性表示。因此有$E$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，因此有

$n=R(E)\le R(A)\le n\Rightarrow R(A)=n\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

必要性：$\forall b\in R^n$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，因此有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$线性相关，即

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=b$有惟一解，所以向量$b$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，由$b$的任意性可得任一$n$维向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示。

证明：$x>0$时，$x^2-2ax+1<e^x(a>0)$.

3

证明：设 $f(x)=x^2-2ax+1-e^x$，则 $f(0)=0, f'(x)=2x-2a-e^x.$

$f''(x)=2-e^x$， $x=\ln 2$ 是 $f'(x)=2x-2a-e^x$ 的极大值点，

$f'(x)\le f'(\ln 2)=2\ln 2-2a-2<0$，于是 $f(x)=x^2-2ax+1-e^x$ 单调递减，

$f(x)<f(0)=0$ 。

从而有 $x^2-2ax+1-e^x<0$，移项后得证。

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 求 $\boldsymbol{x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)}$ $0\le t\le 2\pi$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积。

解：利用旋转侧面积公式得 $\boldsymbol{S=2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}$

$=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt$

$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$

$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 udu$

$=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 udu=\frac{64}{3}\pi a^2.$

数学与应用数学模拟试卷答案（十四）

一、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 1　　2. 6　　3. $\frac{\pi}{3}$　　4. $x+y+z=2$.

5. 1　　6. $-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$ 或者 $2x-y-z+1=0$

7. $dy=(1+x)^x[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]dx$　　8. $(-2,4)$

二、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. D　　2. C　　3. A　　4. D　　5. C　　6. B　　7. D　　8. A

三、判断正误（每小题 5 分，共 40 分）

1. √　　2. ×　　3×　　4. √　　5. √　　6. √　　7. √　　8. ×

四、计算题（每小题 20 分，共 100 分）

1．对方程组的增广矩阵施以初等行变换化为行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -4 & 6 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $R(A)=2=R(\bar{A})<4=n$，所以原方程组有无穷多解，并且由阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}+x_2+x_4 \\ x_3=\frac{1}{2}+2x_4 \end{cases}$$

得方程组的一个特解 $\gamma_0=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)^T$，导出组的同解方程组 $\begin{cases} x_1=x_2+x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}$，

易得导出组的一个基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$.

所以方程组的结构式通解为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ （k_1,k_2 为任意常数）.

2.解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$

$\lambda=2$时，$R(A-\lambda E)=1$

所以该矩阵可以对角化

代入 $\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=-1$ 解得对应的特征向量分别为：

$$k_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}\quad ,k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以：可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}$.

3.解：直线上的点 N（1，-2，0）及已知点 M（3，1，-2）在所求平面上，两点构成向量 $\overrightarrow{NM}=(2,3,-2)$，直线方向向量 s=（2，1，3）；所求平面的法向量 $n\perp\overrightarrow{NM},n\perp s,$ 于是

可取 $n=\overrightarrow{NM}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-7i+2j-4k$，故所求平面方程为

$-7(x-3)+2(y-1)-4(z+2)=0$，即 $7x-2y+4z=11$。

4. 解：利用极坐标，作圆 $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=2$ 将 $\boldsymbol{D}$ 分成 $\boldsymbol{D}_1:\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\le 2$ 和 $\boldsymbol{D}_2:2\le \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\le 3$ 两个区域，$\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D_1}(2-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dxdy}\ ++\iint\limits_{D_2}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-2)\boldsymbol{dxdy}$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(\rho^2-2)\rho d\rho=\frac{5}{2}\pi$$

5.

解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+(x-2)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}$，所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

收敛域为 $\boldsymbol{1<x<3}$

五、证明题（40分）

1. 证明：因为 n 阶对称矩阵 A 正定，所以 $|A|>0, A'=A$，并对任意的非零列向量 X，恒有 $X'AX>0$，从而

$$\begin{aligned} X'A^*X &= X'|A|A^{-1}X=(\sqrt{|A|}X')A^{-1}(\sqrt{|A|}X)=Y'A^{-1}Y \\ &=(A^{-1}Y)'A(A^{-1}Y)>0 \end{aligned}$$

2. **证明：**证明 $o\in W$，即非空。对于任意的 $k\in P, \forall X,Y\in W$,

既有 $AX=XB, AY=YB$,

所以有 $A(X+Y)=XB+YB=(X+Y)B, A(kX)=k(XB)(kX)B$；

所以 $X+Y\in W,kX\in W$，故 W 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的子空间.

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导函数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$

3.

$(a<x_1<x_2<x_3<b)$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。

证明：对函数 $f(x)$ $f(x)$ 在闭区间 $[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2],[\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]$ 上分别利用罗尔定理，得分别至少存在一点 $\boldsymbol{\xi}_1\in(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),\boldsymbol{\xi}_2\in(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，使得 $f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0,$。再在 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]$ 上对 $f'(x)$ 利用罗尔定理，得至少在 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\subset(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3)$ 内至少有一点 ξ，使得

$f''(\xi)=0$

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

19. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在圆柱体 $x^2+y^2\le x$ 内那一部分的面积。

解 根据曲面面积公式，$S=\iint\limits_D\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2\le x$。

所求平面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，故

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

因此 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$，

所以 $S=\iint\limits_D\sqrt{2}dxdy=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

数学与应用数学模拟试卷答案（十五）

一、填空题（每题 5 分，40 分）

1. $a=0$　　2. $(ad-bc)(eh-gf)$　　3. 3　　4. 2

5. e^2　　6. $\frac{1}{2}\ln(1+f^2(x))+C$

7. 1　　8. $a=-3,b=6$

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1.A　2.B　3.C　4. C　5.B　6.C　7.C　8.D

三、判断题（每题 5 分，共 40 分）

1.×　2.×　3.×　4.×　5. √　6. √　7.×　8. √

四、计算题（每题 20 分，共 100 分）

1.解对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施以初等行变换，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&1\\3&2&1&1&-3&\vdots&0\\0&1&2&2&6&\vdots&3\\5&4&3&3&-1&\vdots&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&1\\2&1&0&0&-4&\vdots&-1\\-2&-1&0&0&4&\vdots&1\\2&1&0&0&-4&\vdots&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&1\\2&1&0&0&-4&\vdots&-1\\0&0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&\vdots&-2\\0&1&2&2&6&\vdots&3\\0&0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

得原方程组的同解方程组 $\begin{cases}x_1-x_3-x_4-5x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$

取 x_3,x_4,x_5 为自由未知量，令 $x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，则方程组的一般解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ （c_1, c_2, c_3 为任意常数）.

2. 解：$\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\lambda_1 = 2$

$$\left(A-\lambda E\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得特征向量$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$

$$\left(A-1E\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得特征向量$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1$

$$\left(A+E\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得特征向量$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$$

3. 解：因为　$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$

取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-3&-3&3\\0&-2&3\end{vmatrix}=-3(1,-3,-2)$

于是，所求平面方程　为 $x-3y-2z=0$

4. 解：$I=-\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x d\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{8}+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\dfrac{1}{2}.$

5. 解：因为 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\dfrac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$，则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x},|x|<1$，

所以 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln|1-x|\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{I_n}=\boldsymbol{f}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 20 分，共 40 分. 证明过程、步骤和答案必需完整、正确）

1. 证明：利用线性无关的定义来证明.

设有三个常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$. (*)

又设$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=\beta_1\\ \alpha_2+\alpha_3=\beta_2\\ \alpha_3+\alpha_1=\beta_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)\\ \alpha_2=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)\\ \alpha_3=\dfrac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)\end{cases}$，代入(*)可得

$$(k_1+k_2-k_3)\beta_1+(-k_1+k_2+k_3)\beta_2+(k_1-k_2+k_3)\beta_3=\theta$$

因为β_1,β_2,β_3线性无关，所以 $k_1+k_2-k_3=-k_1+k_2+k_3=k_1-k_2+k_3=0$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$， 故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

2. 证明：必要性，令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots\boldsymbol{B}_n),\boldsymbol{B}_i$是$\boldsymbol{B}$的第$\boldsymbol{i}$ 列，则

$\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 即$(\boldsymbol{AB}_1,\boldsymbol{AB}_2,\cdots\boldsymbol{AB}_n)=\mathbf{0}$ 因为$\boldsymbol{B}$为非零矩阵，至少存在一个$\boldsymbol{B}_i\neq\mathbf{0}$ 顾其次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，则其系数行列式$|\boldsymbol{A}|=\mathbf{0}$

充分性，$|\boldsymbol{A}|=\mathbf{0}$，其次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，设$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_n)^T\neq\mathbf{0}$ 是它的非零解，

则令矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & 2\boldsymbol{b}_1 & \cdots & n\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2 & 2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & n\boldsymbol{b}_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{b}_n & 2\boldsymbol{b}_n & \cdots & n\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{o}$

满足$\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$

证明级数$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$满足方程$y^{(4)}=y$

3.

证明：所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，在收敛域内逐项微分之，得

$y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$，$y''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$，$y'''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$，$y^{(4)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}$代入得证.

六、应用题（本题 20 分.解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

19. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的公共部分的体积。

解 利用对称性，只考虑 xoy 面上方部分的体积，此为一球面为顶，圆柱面为侧面，底为 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的曲顶柱体的体积。

设整个立体体积为 $V=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma$，$D:x^2+y^2=ax(a>0)$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho,$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho=-2\times\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=-2\times\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta=-2\times\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$